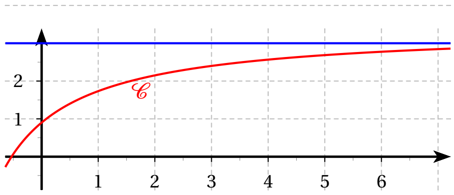
Fonctions : Limites, continuité

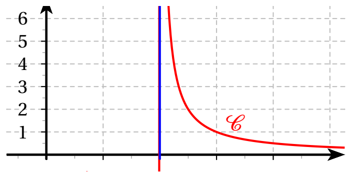
1. **Asymptotes**

   On appelle $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère donné.

   • On dit que la droite d'équation $y = \ell$ est **asymptote horizontale** à $\mathscr{C}$ en $+\infty$ si f a pour limite ℓ en $+\infty$.
   Ici $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 3$.
   La droite d'équation $y = 3$ est asymptote horizontale à $\mathscr{C}$ en $+\infty$.



   • On dit que la droite d'équation $x = a$ est **asymptote verticale** à $\mathscr{C}$ si la limite de f en a par valeurs inférieures ou supérieures est $+\infty$ ou $-\infty$.
   Ici $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x>2}} f(x) = +\infty$.
   la droite d'équation $x = 2$ est asymptote verticale à $\mathscr{C}$



2. **Continuité**

   On dit que f est continue en a si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

3. **Théorème des valeurs intermédiaires**

   Soit f est une fonction continue sur un segment $[\alpha, \beta]$.
   Alors pour tout réel y compris entre $f(\alpha)$ et $f(\beta)$, il existe au moins un réel $x \in [\alpha, \beta]$ tel que $y = f(x)$.
   Si f est de plus supposée strictement monotone, alors le réel x est unique.

4. **Règles opératoires concernant les limites**

   Limite d'une somme

Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) =$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
Si $\lim\limits_{x \to a} g(x) =$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
alors $\lim\limits_{x \to a} (f+g)(x) =$	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	????

   Limite d'un produit

Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) =$	ℓ	ℓ non nul	0	$+\infty$ ou $-\infty$
Si $\lim\limits_{x \to a} g(x) =$	ℓ'	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
alors $\lim\limits_{x \to a} (fg)(x) =$	$\ell \,.\, \ell'$	$\pm\infty$	????	$\pm\infty$

   Limite d'un quotient

Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) =$	ℓ	$\ell \neq 0$	ℓ	$\pm\infty$	0	$\pm\infty$
Si $\lim\limits_{x \to a} g(x) =$	$\ell' \neq 0$	$\ell' = 0$ et $g(x)$ garde un signe constant au voisinage de a	$\pm\infty$	ℓ'	0	$\pm\infty$
alors $\lim\limits_{x \to a} \left(\dfrac{f}{g}\right)(x) =$	$\dfrac{\ell}{\ell'}$	$\pm\infty$	0	$\pm\infty$	????	????

5. **Limite d'une fonction composée**

   Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ et $\lim\limits_{y \to b} g(y) = c$, alors $\lim\limits_{x \to a} g\left(f(x)\right) = c$.

6. **Limite : théorème d'encadrement (des gendarmes)**

   Les limites sont prises en un réel a, ou en $-\infty$, ou en $+\infty$.
   On suppose que pour tout x dans I, $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$.

   (a) Si g et h ont la même limite ℓ, alors f **converge** et sa limite est ℓ.

   (b) Si g tend vers $+\infty$, alors f tend vers $+\infty$.

   (c) Si h tend vers $-\infty$, alors f tend vers $-\infty$.

Dérivée, fonctions sinus et cosinus

1. **Dérivée**

   On dit que f est dérivable en a de dérivée $f'(a)$ si

   $\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)$ ou $\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(x)}{h} = f'(a)$.

2. **Tangente**

   L'équation de la tangente au point d'abscisse a à la courbe représentative de f est :

   $$y = f'(a)(x-a)+f(a)$$

3. **Dérivabilité et continuité**

   Toute fonction dérivable est continue.

   Mais il existe des fonctions continues qui ne sont pas dérivables.

4. **Sens de variation d'une fonction dérivable**

   Si f' est strictement positive (resp. négative) sur un **intervalle** I, alors f est strictement croissante (resp. décroissante) sur I.

   Si f' est la fonction nulle sur un **intervalle** I, alors f est constante sur I.

5. **Dérivées usuelles**

$f(x)$	k	$x^n (n \in \mathbb{Z}^*)$	$\sqrt{x}$	$\sin x$	$\cos x$	e^x	$\ln x$
$f'(x)$	0	nx^{n-1}	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\cos x$	$-\sin x$	e^x	$\frac{1}{x}$
		$x>0$	$x>0$				$x>0$

6. **Dérivées et opérations**

fonctions	ku	$u+v$	uv	$\frac{1}{v}$	$\frac{u}{v}$
dérivées	ku'	$u'+v'$,	$u'v+uv'$	$-\frac{v'}{v^2}$	$\frac{u'v-uv'}{v^2}$

7. **Dérivée d'une fonction composée**

fonctions	u^n	$\sqrt{u}$	$\sin u$	$\cos u$	e^u	$\ln u$
dérivées	$nu'u^{n-1}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$u'\cos u$	$-u'\sin u$	$u'e^u$	$\frac{u'}{u}$
	$n \in \mathbb{Z}$	$u>0$				$u>0$

8. **Les fonctions sinus et cosinus**

   - Les fonctions cos : $x \mapsto \cos x$ et sin : $x \mapsto \sin x$ sont définies sur $\mathbb{R}$ et sont périodiques de période 2π.
   - La fonction cos est paire sur $\mathbb{R}$ et la fonction sin est impaire sur $\mathbb{R}$
   - Les fonctions cos et sin sont continues et dérivables sur $\mathbb{R}$ et on a :

     Pour tout réel x, $\cos' x = -\sin x$ et $\sin' x = \cos x$.

9. **Limites des fonctions sinus et cosinus**

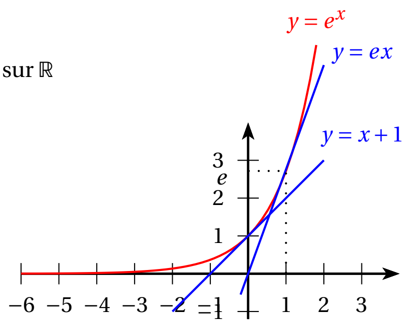
   On a $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ et $\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$

   ATTENTION : Les fonctions sinus et cosinus n'ont pas de limite en l'infini.

Fonction exponentielle

1. **Dérivée**
La fonction exponentielle est l'unique fonction f continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$. On note $\mathrm{e} = f(1)$

x	$-\infty$ $\qquad$ 0 $\qquad$ $+\infty$
$\exp'(x)$	$+$
$\exp$	$0 \nearrow 1 \nearrow +\infty$



2. **Propriétés**
Pour tous réels a et b et pour tout entier n :
$\mathrm{e}^{a+b} = \mathrm{e}^a\mathrm{e}^b \qquad \mathrm{e}^{-b} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^b} \qquad \mathrm{e}^{a-b} = \dfrac{\mathrm{e}^a}{\mathrm{e}^b} \qquad \mathrm{e}^{na} = (\mathrm{e}^a)^n \qquad \mathrm{e}^{\frac{a}{2}} = \sqrt{\mathrm{e}^a}$

3. **Limites**
$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = 1 \qquad \lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty \qquad \lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0$

4. **Croissances comparées :** Pour tout réel x : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x\mathrm{e}^{-x} = 0$

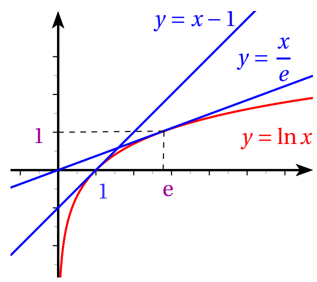
5. **Fonction composée** $x \mapsto \mathrm{e}^{u(x)}$
Soit une fonction u définie et dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
La fonction f définie sur I par $f(x) = \mathrm{e}^{u(x)}$ est dérivable sur I et, pour tout $x \in I, f'(x) = u'(x)\mathrm{e}^{u(x)}$.

Fonction logarithme népérien

1. **Logarithme népérien**
On appelle logarithme népérien du réel strictement positif a l'unique réel b tel que $a = \mathrm{e}^b$. Pour tout réel a strictement positif et tout réel b : $\ln a = b \iff a = \mathrm{e}^b$

2. **Dérivée**
La fonction ln est définie, continue et dérivable sur $]0;+\infty[$ et, pour tout x de $]0;+\infty[$, on a $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$.

x	0 $\qquad$ 1 $\qquad$ $+\infty$
$\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$	$+$
$\ln x$	‖ $-\infty \nearrow 0 \nearrow +\infty$



3. **Propriétés**
Pour tous réels $a > 0$, $b > 0$ et pour tout entier naturel n :
$\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b) \qquad \ln\left(\dfrac{1}{b}\right) = -\ln(b) \qquad \ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b) \qquad \ln(a)^n = n\ln(a) \qquad \ln(\sqrt{a}) = \dfrac{1}{2}\ln(a)$

4. **Limites**
$\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1 \qquad \lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty \qquad \lim\limits_{x\to0} \ln x = -\infty$

5. **Croissances comparées :** Pour tout réel $x > 0$: $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+0} x\ln x = 0$

6. **Dérivée de** $x \mapsto \ln(u(x))$
Soit une fonction u dérivable et strictement positive sur un intervalle I, alors la fonction f définie sur I par $f(x) = \ln[u(x)]$ est dérivable sur I et, pour tout $x \in I, f'(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$.

Intégrale

1. **Primitive**

   Une primitive d'une fonction f définie sur un intervalle I est une fonction F dérivable sur I et de dérivée f.

   Propriété

   Si F est une primitive de f sur un intervalle I, alors l'ensemble des primitives de f sur I est l'ensemble des fonctions qui s'écrivent $F+c$ où c est une constante réelle.

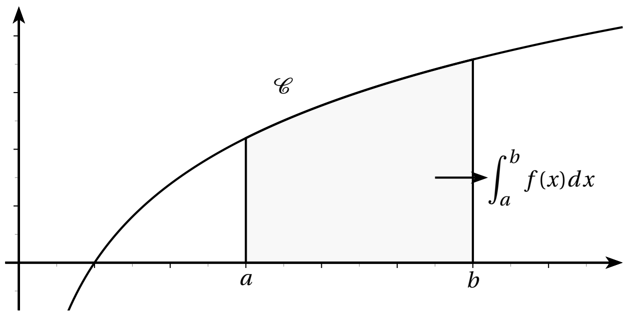
   Primitives usuelles

$f(x)$	a	$x^n\,(n \in \mathbb{N}^*)$	$\dfrac{1}{x^2}$	$\dfrac{1}{x}$	$\sin x$	$\cos x$	e^x
$F(x)$	$ax+b$	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1}+c$	$-\dfrac{1}{x}+c$	$\ln x+c$	$-\cos x+c$	$\sin x+c$	e^x+c
			$\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$	$\mathbb{R}_+^*$			

2. **Intégrale** :

   Soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative dans un repère orthonormal d'une fonction f continue et positive sur un intervalle $[a, b]$.

   On appelle intégrale de f sur $[a, b]$ et on note $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ l'aire comprise entre l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}$ et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$.



   Théorème

   Soit f une fonction continue sur un intervalle I, $a \in I$ et $b \in I$.

   Alors la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ est dérivable sur I de dérivée f. C'est l'unique primitive de f sur I s'annulant en a.

   $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt = F(b)-F(a)$, où F est une primitive quelconque de f sur I.

3. **Propriétés de l'intégrale**

   f et g sont deux fonctions continues sur un intervalle I, λ, μ deux réels quelconques et a, b, c trois réels de I. Alors :

   (a) $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^b f(t)\,dt$ (Relation de Chasles).

   (b) $\displaystyle\int_a^b (\lambda f+\mu g)(t)\,dt = \lambda\int_a^b f(t)\,dt + \mu\int_a^b g(t)\,dt$ (linéarité).

   (c) Si f est positive sur I, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)dt \geqslant 0$.

   (d) Si $f(t) \leqslant g(t)$ sur $[a, b]$, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt \leqslant \int_a^b g(t)\,dt$.

4. **Valeur moyenne**

   Soit f une fonction continue sur un segment $[a, b]$ avec $a \neq b$.

   On appelle valeur moyenne de f sur $[a, b]$ le réel $\displaystyle\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt$.

Suites arithmétiques, Suites Géométriques

1. **Récurrence**

   Pour démontrer **par récurrence** qu'une proposition $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel n :
   - On vérifie que $\mathscr{P}_0$ est vraie.
   - On suppose que pour **un** entier n quelconque, la proposition $\mathscr{P}_n$ est vraie.
     Sous cette hypothèse, on démontre que la proposition $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.
   - Par récurrence on en déduit que la proposition $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel n.

2. **Suite arithmétique**

   On dit que la suite (u_n) est arithmétique de raison r si pour tout entier naturel n, on a $u_{n+1} - u_n = r$.

   Pour tout entier naturel n, $\quad u_n = u_0 + nr$ et $u_n = u_p + (n-p)r$.

   Pour tout entier naturel n non nul :

   $$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

   $$u_0 + u_1 + \cdots + u_n = (n+1)\left(\frac{u_0 + u_n}{2}\right).$$

3. **Suite géométrique**

   On dit que la suite (u_n) est géométrique de raison q ($q \neq 0$) si pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = qu_n$.

   On a alors pour tout entier naturel n, $\quad u_n = u_0 q^n$ et $u_n = u_p q^{n-p}$.

   Si $q \neq 1$, $\quad 1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} + q^n = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$

   Si $q = 1$, $\quad 1 + q + \cdots + q^n = n + 1$.

Convergence des suites monotones

1. **Suite bornée**

   La suite (u_n) est majorée s'il existe un réel M tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant M$.

   La suite (u_n) est minorée s'il existe un réel m tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant m$.

   Si une suite est majorée et minorée, on dit qu'elle est bornée.

2. **Suite monotone**

   La suite (u_n) est croissante si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \geqslant u_n$.

   La suite (u_n) est décroissante si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leqslant u_n$.

3. **Limites et comparaison** (Théorème des "gendarmes")

   $(u_n), (v_n), (w_n)$ sont trois suites réelles et ℓ un nombre réel.

   • Si à partir d'un certain rang $v_n \leqslant u_n \leqslant w_n$
   et si les suites (v_n) et (w_n) convergent vers la **même** limite ℓ
   alors la suite (u_n) **converge** et sa limite est ℓ.

   • Si à partir d'un certain rang $u_n \leqslant w_n$
   et si la suite (w_n) tend vers $-\infty$ quand n tend vers $+\infty$
   alors la suite (u_n) tend vers $-\infty$ quand n tend vers $+\infty$.

   • Si à partir d'un certain rang $v_n \leqslant u_n$
   et si la suite (v_n) tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$
   alors la suite (u_n) tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.

4. **Théorème**
   - Toute suite croissante majorée est convergente.
   - Toute suite croissante non majorée tend vers $+\infty$.
   - Toute suite décroissante minorée est convergente.
   - Toute suite décroissante non minorée tend vers $-\infty$.

5. **Limite d'une suite géométrique**

   Si $-1 < r < 1$, alors $\lim\limits_{n \to \infty} r^n = 0$.

   Si $r > 1$, alors $\lim\limits_{n \to \infty} r^n = +\infty$.

   Si $r \leqslant -1$, alors la suite (r^n) n'a pas de limite.

Nombres complexes

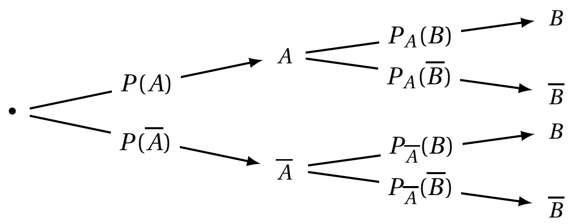
Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

1. **Définitions, forme algébrique**
   Tout point M du plan de coordonnées (x, y) représente un nombre complexe $z = x + iy$, appelé **affixe** de M.
   On appelle **partie réelle** de z : $\text{Re}(z) = x$ et **partie imaginaire** de z : $\text{Im}(z) = y$.
   On convient que $i^2 = -1$.
   L'addition et la multiplication ont les mêmes propriétés que celles de $\mathbb{R}$.
2. **Conjugué**
   On appelle conjugué de ce nombre le nombre complexe $\overline{z} = x - iy$.
3. **Module**
   On appelle module de z la distance OM.
   On note $|z| = r = OM = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z\overline{z}}$.
   Inégalité triangulaire : $|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$
4. **Argument**
   On appelle argument du nombre complexe non nul z n'importe quelle mesure exprimée en radians de l'angle $(\vec{u}, \overrightarrow{OM})$.
5. **Forme trigonométrique**
   La forme trigonométrique de z est : $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$.
   Deux nombres complexes sont égaux si et seulement si ils ont même module et même argument à $k2\pi$ près.
6. **Forme exponentielle**
   Pour tout réel θ on pose : $\text{e}^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$. La forme exponentielle de z est : $z = r\text{e}^{i\theta}$ où r est le module de z.
7. **Règles de calcul :**
   • Produit : $\overline{z_1.z_2} = \overline{z_1}.\overline{z_2}$; $|z_1.z_2| = |z_1|.|z_2|$;
   $\arg(z_1.z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2) + k2\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$
   Se résume par : $\mathbf{r_1}\text{e}^{\mathbf{i}\theta_1} \times \mathbf{r_2}\text{e}^{\mathbf{i}\theta_2} = \mathbf{r_1}\mathbf{r_2}\text{e}^{\mathbf{i}(\theta_1+\theta_2)}$
   • Inverse : $\overline{\left(\dfrac{1}{z}\right)} = \dfrac{1}{\overline{z}}$; $\left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{|z|}$; $\arg\left(\dfrac{1}{z}\right) = -\arg z + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$
   • Quotient : $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$ $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$ $\arg\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2) + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$
   Se résume par : $\dfrac{\mathbf{r_1}\text{e}^{\mathbf{i}\theta_1}}{\mathbf{r_2}\text{e}^{\mathbf{i}\theta_2}} = \dfrac{\mathbf{r_1}}{\mathbf{r_2}}\text{e}^{\mathbf{i}(\theta_1-\theta_2)}$

Probabilités : Conditionnement, indépendance

1. **Probabilité conditionnelle**
   A et B sont deux événements tels que $P(A) \neq 0$.
   La probabilité de B sachant que A est réalisé est : $P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$.
2. **Événements indépendants**
   On dit que les événements A et B sont indépendants lorsque :
   $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.
   Si les événements A et B sont indépendants, les événements $\overline{A}$ et $\overline{B}$ le sont aussi.
3. **Formule des probabilités totales**
   $A_1, \dots, A_n$ sont des événements incompatibles de réunion l'univers (on dit qu'ils forment une partition de l'univers) et tous de probabilité non nulle.
   Alors la probabilité de tout événement B est égale à :

$$P(B) = P(A_1 \cap B) + \dots + P(A_n \cap B) = P_{A_1}(B)P(A_1) + \dots + P_{A_n}(B)P(A_n).$$



Variables aléatoires

1. **Loi Binomiale**
   Épreuve de Bernoulli
   C'est une expérience aléatoire présentant deux issues :
   • L'une appelée « succès », de probabilité p
   • L'autre appelée « échec », de probabilité $1 - p$.
   Loi Binomiale
   On appelle X le nombre de succès obtenus lorsque on répète n fois et de manière indépendante une même épreuve de Bernoulli de paramètre p.
   La loi de la variable aléatoire X s'appelle loi binomiale de paramètres n et p.

$$\text{Pour} \quad 0 \leqslant k \leqslant n, \quad P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

   L'**espérance** de X est : $E(X) = \displaystyle\sum_{k=1}^{k} x_k P(X = x_k) = np$.
   La **variance** de X est $V(X) = \displaystyle\sum_{k=1}^{k} x_k^2 P(X = x_k) - (E(X))^2 = np(1-p)$.
   L'**écart-type** de X est $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{np(1-p)}$.
2. **Variable aléatoire définie par une densité**
   On dit que la variable aléatoire X admet pour densité la fonction f continue sur l'intervalle I si pour tout segment $[a, b]$ inclus dans I,

$$P(X \in [a, b]) = \int_a^b f(t)\,dt.$$

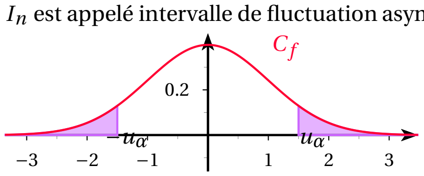
3. **Loi uniforme**
   On dit que la variable aléatoire X suit la loi uniforme sur $[0;1]$ si X admet pour densité la fonction f égale à 1 sur $I = [0;1]$.

4. **Loi exponentielle**
On dit que la variable aléatoire X suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, si X admet pour densité la fonction f définie par :
$$\forall t \in [0 ; +\infty[, \quad f(t) = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}.$$
L'espérance de X est $E(X) = \dfrac{1}{\lambda}$.
La loi exponentielle est une loi sans mémoire, sans vieillissement :
Pour tous réels t et h strictement positifs on a : $P_{X \geqslant t}(X \geqslant t+h) = P(X \geqslant h)$.

5. **Loi normale**
On dit qu'une variable aléatoire X suit une loi normale **centrée réduite**, si elle admet pour densité la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}$.
On dit que la variable aléatoire X suit la normale de moyenne μ et d'écart-type σ si la variable aléatoire $Y = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$ suit la loi normale centrée réduite.

6. **Théorème de Moivre Laplace et intervalle de fluctuation**
X_n est une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres n et p.
Alors pour tous les réels a et b tels que $a < b$:
   - $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} P\left(a \leqslant \frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leqslant b\right) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\, dt.$
   - Donc pour tout réel α dans $]0, 1[$ on a : $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} P\left(\frac{X_n}{n} \in I_n\right) = 1 - \alpha,$

où I_n désigne l'intervalle $\left[p - u_\alpha \dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} ; p + u_\alpha \dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$
et u_α est l'unique réel strictement positif tel que $\displaystyle\int_{-u_\alpha}^{u_\alpha} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt = 1 - \alpha$
I_n est appelé intervalle de fluctuation asymptotique de la fréquence F_n au seuil de sécurité $1 - \alpha$.



$u_{0,05} \approx 1,96$ et $u_{0,01} \approx 2,58$.

Géométrie dans l'espace

1. **Vecteurs dans l'espace**

   Soient $\vec{u}, \vec{v}$ deux vecteurs de l'espace non colinéaires et $\vec{w}$ un vecteur de l'espace.

   On dit que les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ sont coplanaires si il existe deux réels a et b vérifiant : $\vec{w} = a\vec{u} = +b\vec{w}$.

   Si les trois vecteurs $\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3}$ sont non coplanaires, alors tout vecteur $\vec{v}$ de l'espace se décompose en fonction de ces vecteurs : Il existe trois réels a_1, a_2, a_3 uniques (appelés composantes) tels que $\vec{v} = a_1\vec{u_1} + a_2\vec{u_2} + a_3\vec{u_3}$.

2. **Droites et plans de l'espace**

   La **droite** passant par le point $A(x_A, y_A, z_A)$ et dirigée par le vecteur $\vec{u}(a, b, c)$ non nul est l'ensemble des points $M(x, y, z)$ de l'espace tels que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires : Il existe un réel t vérifiant $\overrightarrow{AM} = t\vec{u}$.

   Une **équation paramétrique** de cette droite est : $\begin{cases} x = at + x_A \\ y = bt + y_A \\ z = ct + z_A \end{cases}$

   Le **plan** passant par le point $A(x_A, y_A, z_A)$ et dirigé par les vecteurs $\vec{u}(\alpha, \beta, \gamma)$ et $\vec{v}(\alpha', \beta', \gamma')$ non colinéaires est l'ensemble des points $M(x, y, z)$ de l'espace tels que les vecteurs $(\overrightarrow{AM}, \vec{u}, \vec{u'})$ sont coplanaires :

   Il existe deux réels t, t' vérifiant : $\overrightarrow{AM} = t\vec{u} + t'\vec{u'}$

   Une **équation paramétrique** de ce plan est : $\begin{cases} x = x_A + \alpha t + \alpha' t' \\ y = y_A + \beta t + \beta' t' \\ z = z_A + \gamma t + \gamma' t' \end{cases}$

3. **Intersection de droites et plans dans l'espace**

   Intersection de deux droites

   L'intersection de deux droites non coplanaires est vide.

   L'intersection de deux droites coplanaires distinctes est :
   – soit vide (droites parallèles)
   – soit réduite à un point (droites sécantes)

   Intersection d'une droite et un plan

   L'intersection d'une droite et un plan peut être :
   – Réduite à un point (ils sont sécants)
   – Égale à la droite (droite incluse dans le plan)
   – Vide (droite strictement parallèle au plan)

   Intersection de deux plans

   L'intersection de deux plans peut être :
   – Égale à une droite (plans sécants)
   – Vide (plans parallèles)

4. **Produit scalaire**

   La **norme** d'un vecteur $\vec{u}$ de l'espace de coordonnées (x, y, z) dans un repère orthonormal est : $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

   Le **produit scalaire** des vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de l'espace de coordonnées respectives (x, y, z) et (x', y', z') est $\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy' + zz'$.

   Propriétés du produit scalaire

   Quels que soient les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ et les réels a, b :

   $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$ $\quad$ $\vec{u}.(a\vec{v} + b\vec{w}) = a\vec{u}.\vec{v} + b\vec{u}.\vec{w}$ $\quad$ $\vec{u}.\vec{u} = \|\vec{u}\|^2$

   Vecteurs orthogonaux

   On dit que les vecteurs non nuls $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont orthogonaux si les droites (AB) et (CD) sont orthogonales.

   Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u}.\vec{v} = 0$.

5. **Équation cartésienne d'un plan dans un repère orthonormal**

   On appelle vecteur normal d'un plan tout vecteur non nul orthogonal à tous les vecteurs directeurs du plan.

   Le plan passant par $A(x_A, y_A, z_A)$ et de vecteur normal $\vec{n}(a, b, c)$ est l'ensemble des points $M(x, y, z)$ de l'espace tels que $\overrightarrow{AM}.\vec{u} = 0$.

   Une équation cartésienne de ce plan dans un repère orthonormal est :

   $a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0$ soit de la forme $ax + by + cz + d = 0$.

   Réciproquement une équation de la forme $ax + by + cz + d = 0$ où a, b, c sont trois réels non tous nuls, est l'équation d'un plan.

   Dans un repère orthonormal, le vecteur $\vec{n}(a, b, c)$ est normal à ce plan.